Lección n°6: Límites y propiedades universales. EPN, 2021

10. Límites

Un límite, de manera general, en teoría de categorías es una forma de construir un objeto, a partir de la existencia de otros, de tal manera que un diagrama en concreto conmute.

Ya nos hemos encontrado con el primer ejemplo: el producto de dos objetos X, Y, al que hemos llamado, por ser esencialmente único, como $X \times Y$. Recordemos que tal objeto, viene acompañado de flechas $p_1 : X \times Y \to X$ y $p_2 : X \times Y \to Y$ tal que si existe otro objeto A con flechas $f_1 : A \to X$ y $f_2 : A \to Y$, entonces existe un único $\overline{f}$ tal que conmuta el diagrama

$$\begin{tikzcd}
 & A \arrow[d, "\overline{f}"] \arrow[ddl, "f_1"'] \arrow[ddr, "f_2"] & \\
 & X \times Y \arrow[dl, "p_1"] \arrow[dr, "p_2"'] & \\
X & & Y
\end{tikzcd}$$

Esto no es nada nuevo, pero observemos que $X \times Y$ ha sido construido con varios ingredientes. En primer lugar, tenemos los *datos* iniciales: X e Y, por otro lado, buscamos un objeto *límite* el cual es, en este caso, $X \times Y$ junto a las flechas p_1 y p_2 que las llamaremos *proyecciones*. Este objeto junto con las proyecciones visualmente forman un *cono*. Estos términos serán formalizados muy pronto.

Ahora, para cualquier otro objeto A en la categoría tal que se relacione con los datos formando también un cono, en nuestro caso el objeto A y las flechas f_1, f_2; tendremos que existe una flecha $\overline{f}$ única entre el objeto límite y este objeto arbitrario.

Definición (Límite)**.**

- *Sea $\mathscr{A}$ una categoría e I una categoría pequeña entonces un funtor $I \to \mathscr{A}$ es conocido como* ***diagrama*** *en $\mathscr{A}$, con forma I.*
- *Sea $D : I \to \mathscr{A}$ un diagrama, entonces un* ***cono*** *en D es un un objeto $A \in \mathrm{ob}(\mathscr{A})$ junto con una familia de flechas*
$$\{f_i : A \to D(i)\}_{i \in \mathrm{ob}(I)}, \tag{1}$$
en $\mathscr{A}$ tal que para todo $h : i \to j \in \mathrm{Hom}(I)$, el diagrama

$$
\begin{tikzcd}
 & D(i) \arrow[dd, "D(h)"] \\
A \arrow[ur, "f_i"] \arrow[dr, "f_j"'] & \\
 & D(j)
\end{tikzcd}
$$

es conmutativo.

- *Un* ***límite*** *del diagrama D es un cono $\{p_i : L \to D(i)\}_{i \in \mathrm{ob}(I)}$ tal que para cualquier otro cono en D, como el de (1), existe una única flecha $\overline{f} : A \to L$ tal que $p_i \circ \overline{f} = f_i$ para todo $i \in \mathrm{ob}(I)$. Siendo explícitos, el siguiente diagrama debe conmutar*

$$
\begin{tikzcd}
 & & D(i) \arrow[dd, "D(h)"] \\
A \arrow[urr, "f_i"] \arrow[drr, "f_j"'] \arrow[r, dotted, "\overline{f}"] & L \arrow[ur, "p_i"] \arrow[dr, "p_j"'] & \\
 & & D(j)
\end{tikzcd}
\qquad \forall i, j \in \mathrm{ob}(I).
$$

A L se le dirá ***objeto límite****, las flechas p_i serán las* ***proyecciones*** *del límite.*

Observación 28. *La idea de un diagrama $D : I \to \mathscr{A}$ es similar a la de elemento generalizado, la categoría pequeña I hace el papel de molde para los* ***datos*** *$D(I)$ en $\mathscr{A}$. A la categoría I también se le llama categoría* ***índice****, y a los límites descritos aquí se los conoce como* ***límites indexados****. Veremos más adelante que, tanto las proyecciones como el objeto límite serán esencialmente únicas.*

Por ejemplo, si tenemos la categoría pequeña con solo dos elementos, sin ninguna flecha entre ellos

$$\star \qquad\qquad \bullet$$

entonces $D(I)$ será un par de elementos de $\mathscr{A}$, y el límite para D es el producto $D(\star) \times D(\bullet)$ en $\mathscr{A}$. Es sencillo observar que, aquí la definición de límite no es otra cosa que la propiedad universal del producto.

De igual importancia, son los límites para las siguientes categorías índices:

$$\star \rightrightarrows \bullet$$

y

$$\begin{tikzcd} & \bullet \arrow[d] \\ \clubsuit \arrow[r] & * \end{tikzcd}$$

a los que llamaremos el ecualizador y el pullback, respectivamente. A continuación los detallamos.

Definición. *Dada una categoría $\mathscr{A}$ y dadas 2 flechas paralelas*

$$\begin{tikzcd} A \arrow[r, shift left, "f"] \arrow[r, shift right, "g"'] & B \end{tikzcd}$$

un ***ecualizador*** *es una flecha $e : E \to A$ tal que $f \circ e = g \circ e$ y, que además para todo $z : X \to A$ con $f \circ z = g \circ z$, existe una única flecha $u : X \to E$ tal que $e \circ u = z$*

$$\begin{tikzcd} E \arrow[r, "e"] & A \arrow[r, shift left, "f"] \arrow[r, shift right, "g"'] & B \\ X \arrow[u, dotted, "u"] \arrow[ur, "z"'] & & \end{tikzcd}$$

Observación 29. *Aquí los datos no son solo A y B sino todo el diagrama*

$$\begin{tikzcd} A \arrow[r, shift left, "f"] \arrow[r, shift right, "g"'] & B \end{tikzcd}$$

El objeto límite E tiene, en realidad, dos proyecciones $e : E \to A$, $e' : E \to B$; pero, por la conmutatividad requerida en la definición de cono, se tiene que $fe = ge = e'$; por tanto, e' está completamente determinada y no es necesario escribirla. Así, el cono (E, e), por la definición de límite, cumple que para cualquier otro cono (X, z) existe una única flecha u del elemento arbitrario X al objeto límite E tal que el diagrama descrito conmute.

Ejemplo 10.1. *Sea $\mathscr{A}$ una categoría y tomemos un diagrama en $\mathscr{A}$*

$$\begin{tikzcd} & Y \arrow[d, "t"] \\ X \arrow[r, "s"] & Z \end{tikzcd}$$

Entonces un ***pullback*** *para este diagrama es un objeto P junto con un par de flechas $p_1 : P \to X$, $p_2 : P \to Y$ tales que el diagrama siguiente conmuta*

$$\begin{tikzcd} P \arrow[r, "p_2"] \arrow[d, "p_1"'] & Y \arrow[d, "t"] \\ X \arrow[r, "s"'] & Z \end{tikzcd}$$

y para cualquier otro diagrama conmutativo

$$\begin{tikzcd}
A \arrow[r, "f_2"] \arrow[d, "f_1"'] & Y \arrow[d, "t"] \\
X \arrow[r, "s"'] & Z
\end{tikzcd}$$

en la categoría $\mathscr{A}$, existe una única flecha $\overline{f} : A \to P$ tal que

$$\begin{tikzcd}
A \arrow[dr, dotted, "\overline{f}"] \arrow[drr, "f_2"] \arrow[ddr, "f_1"'] & & \\
& P \arrow[r, "p_2"] \arrow[d, "p_1"] & Y \arrow[d, "t"] \\
& X \arrow[r, "s"] & Z
\end{tikzcd}$$

conmuta.

Observación 30. *Al igual que en el anterior ejemplo, los datos que tenemos son el diagrama inicial en forma de L reflejada. El objeto límite es P y las proyecciones son hacia los tres objetos en los datos; pero, por asumir conmutativas con todas las flechas del diagrama inicial, una de estas proyecciones, a saber, $P \to Z$ es redundante de escribir.*

Definición. *Si es que tenemos un diagrama $D : I \to \mathscr{A}$, en $\mathscr{A}$; entonces un **colímite** de D es límite para el diagrama $D^{op} : I^{op} \to \mathscr{A}^{op}$, en $\mathscr{A}^{op}$.*

Explícitamente:

*Sea $D : I \to \mathscr{A}$ un diagrama, entonces un **cocono** en D es un un objeto $A \in \mathrm{ob}(\mathscr{A})$ junto con una familia de flechas*

$$\{f_i : D(i) \to A\}_{i \in \mathrm{ob}(I)}, \tag{2}$$

en $\mathscr{A}$, tal que para para todo $h : i \to j \in \mathrm{Hom}(I)$, el diagrama

$$\begin{tikzcd}
& D(i) \arrow[dl, "f_i"'] \arrow[dd, "D(h)"] \\
A & \\
& D(j) \arrow[ul, "f_j"]
\end{tikzcd}$$

es conmutativo.

*Un **colímite** del diagrama D es un cocono $\{q_i : D(i) \to L\}_{i \in \mathrm{ob}(I)}$ tal que para cualquier otro cocono en D, como el de (2), existe una única flecha $\overline{f} : L \to A$ tal que $\overline{f} \circ q_i = f_i$, para todo $i \in \mathrm{ob}(I)$. El siguiente diagrama debe conmutar*

$$\begin{tikzcd} & & D(i) \arrow[lld, "f_i"'] \arrow[ld, "q_i"] \arrow[dd, "D(h)"] \\ A & L \arrow[l, dotted, "\overline{f}"'] & \\ & & D(j) \arrow[llu, "f_j"] \arrow[lu, "q_j"'] \end{tikzcd} \qquad \forall i,j \in \mathrm{ob}(I).$$

*A L se le dirá **objeto colímite**, las flechas q_i serán las **coproyecciones** del colímite.*

Observación 31. *Se puede escribir al elemento límite L de un diagrama D, con categoría índice I, como*

$$\lim_{\leftarrow I} D,$$

y al colímite como

$$\lim_{\rightarrow I} D.$$

Sin embargo, una notación estándar no existe y usualmente cambia en el contexto usado. Véase, por ejemplo, 10.6.

La utilidad de los límites reside en permitirnos estudiar de forma estructurada la construcción de nuevos elementos, o de conceptos en matemática que posiblemente ya son conocidos por el lector.

Ejemplo 10.2. *En los ejercicios resueltos al final de la lección, se ha demostrado y probado la existencia, en la categoría **Set**, de algunos productos y ecualizadores. Por otro lado, en la lección anterior nos encontramos ya con un ejemplo de colímite, a saber, el coproducto. Seguimos con ejemplos en otras categorías.*

- *Consideramos $\varphi : G \to H$ una flecha en **Grp**, es decir, un homomorfismo de grupo, y sea tambien $\epsilon : G \to H$ el homomofismo trivial $\epsilon(g) = e$ para todo $g \in G$. Ahora notemos que $\ker(\varphi)$ es un subgrupo de G. Más aún es claro que si $i : \ker(\varphi) \to G$ es la inclusión en G, entonces se cumple $\varphi \circ i = \epsilon \circ i$, por tanto tenemos el diagrama*

  $$\ker(\varphi) \xrightarrow{\ i\ } G \underset{\epsilon}{\overset{\varphi}{\rightrightarrows}} H$$

  Cabe preguntarnos si $\ker(\varphi)$ es un objeto límite, es decir, si es un ecualizador para $\varphi, \epsilon : G \to H$.

  *Esto es, en efecto, cierto. La demostración es análoga a la hecha para la categoría **Set** en el ejercicio resuelto 5. De esta manera, el ecualizador es un elemento límite A tal que*

  $$A = \{g \in G : \ \varphi(g) = \epsilon(g)\} = \{g \in G : \ \varphi(g) = e\} = \ker(\varphi).$$

- *En **Set**, tenemos que el pullback del diagrama descrito en la definición 10.1, es el conjunto*

  $$P = \{(x, y) \in X \times Y \ : \ s(x) = t(y)\},$$

  con proyecciones dadas por $p_1(x, y) = x$ y $p_2(x, y) = y$.

  Esto se deja como ejercicio. Pista: Comparar con el ejercicio resuelto 6.

Al conjunto P también se lo escribe como $X \times_Z Y$ y se lo conoce como el ***producto fibrado*** *de X y Y, a lo largo de Z.*

- *Un ejemplo sencillo de pullback es el siguiente: consideramos el poset $\mathscr{P}(Z)$ formado por todos los subconjuntos de un conjunto Z. Visto como categoría, se tiene que hay una flecha $X \to Y$ si y solo si $X \subseteq Y$. Es decir, podemos pensar en todas las flechas como inclusiones.*

  Ahora, se tiene el siguiente diagrama:

$$\begin{tikzcd} X \cap Y \arrow[r, hook] \arrow[d, hook] & Y \arrow[d, hook] \\ X \arrow[r, hook] & Z \end{tikzcd}$$

  donde cada flecha $\hookrightarrow$ representa una inclusión. Entonces se tiene que este diagrama conmutativo cumple la definición de pullback, así $X \cap Y = X \times_Z Y$.

- *Al igual que el coproducto o el coecualizador, tenemos también la correspondiente noción para el pullback, que lo llamaremos* ***pushout****. Se insiste que estos términos no se deben confundir con los usados para hablar de la acción de una función por pre y post-composición, estas nociones son diferentes, aunque tienen cierta relación.*

  En nuestro contexto, un ejemplo importante de pushout, que ilustra esta relación, es el que existe en ***Top*** *para el diagrama*

$$\begin{tikzcd} A \arrow[r, "i"] \arrow[d, "f"'] & X \\ Y & \end{tikzcd}$$

  (notemos que las flechas han sido invertidas, en contraste con el pullback) donde X, Y son espacios topológicos, A es subespacio de X, i es la inclusión respectiva y f es una función continua.

  Se puede verificar que el espacio de adjunción (ver Lección 1) $X \cup_f Y$, es el objeto límite, es decir, es el pullout junto con las flechas

$$q_1 : Y \to X \cup_f Y,$$

$$q_2 : X \to X \cup_f Y,$$

  definidas como la composición de las respectivas inyecciones canónicas $Y \to X \coprod Y$ y $X \to X \coprod Y$, junto con el mapa cociente $X \coprod Y \to X \cup_f Y$.

Los límites no siempre existen. Así, por ejemplo la categoría **2** con dos objetos y ninguna flecha entre ellos

$$\overset{A}{\bullet} \qquad\qquad \overset{B}{\bullet}$$

Obsérvese que no existe el producto categórico $A \times B$.

Existen obviamente muchos más tipos de límites en teoría de categorías que los 3 expuestos en esta sección, pero estos son los más importantes y elementales.

Definición. *Diremos que una categoría $\mathscr{A}$ posee sus productos binarios, si es que el producto $A \times B$ en $\mathscr{A}$ existe para todos par de objetos. Se dice que posee sus productos si es que cumple que existen productos $\prod_{i \in I} X_i$ para toda familia arbitraria de elementos $(X_i)_{i \in I}$. De manera similar, diremos que una categoría posee sus ecualizadores y pullbacks.*

En general diremos que $\mathscr{A}$ posee todos sus límites si es que para cada categoría índice I pequeña y su correspondiente diagrama $D : I \to \mathscr{A}$ existe el límite

$$\lim_{\leftarrow I} D.$$

Si es que esto pasa solo para I finito se dice que $\mathscr{A}$ posee todos sus límites finitos.

Una relación importante entre estos tres tipos de límites es la siguiente.

Teorema 10.3. *Si una categoría $\mathscr{A}$ posee sus productos binarios y sus ecualizadores, entonces posee a sus pullbacks.*

Demostración. Supongamos que tenemos un diagrama de la forma

$$\begin{tikzcd}
 & Y \arrow[d, "t"] \\
X \arrow[r, "s"] & Z
\end{tikzcd}$$

entonces debemos hallar P junto con flechas p_1, p_2 tal que el cuadrado

$$\begin{tikzcd}
P \arrow[r, "p_2"] \arrow[d, "p_1"'] & Y \arrow[d, "t"] \\
X \arrow[r, "s"] & Z
\end{tikzcd}$$

cumple la definición de pullback. Para hacerlo consideremos el producto $X \times Y$ y las proyecciones del mismo $\pi_1 : X \times Y \to X$, $\pi_2 : X \times Y \to Y$, las cuales por hipótesis, existen. Luego tomamos en cuenta las flechas paralelas $t \circ \pi_2$ y $s \circ \pi_1$ que van de $X \times Y$ a Z. Entonces, también por hipótesis existe un ecualizador E, junto a su proyección $e : E \to X \times Y$. Así, por definición, se tiene que $t \circ \pi_2 \circ e$ y $s \circ \pi_1 \circ e$ coinciden. Explícitamente, el siguiente diagrama conmuta.

$$\begin{tikzcd}
E \arrow[dr, "e"] & & \\
 & X \times Y \arrow[r, "\pi_2"] \arrow[d, "\pi_1"'] & Y \arrow[d, "t"] \\
 & X \arrow[r, "s"] & Z
\end{tikzcd}$$

Ahora, si es que ponemos $P := E$ y $p_1 := \pi_1 \circ e$, $p_2 := \pi_2 \circ e$, obtenemos un pullback. En efecto, obtenemos un cuadrado conmutativo, más aún para cualquier otro, digamos

$$\begin{tikzcd} W \arrow[r, "w_2"] \arrow[d, "w_1"'] & Y \arrow[d, "t"] \\ X \arrow[r, "s"] & Z \end{tikzcd}$$

de donde, podemos considerar la flecha

$$l = (w_1, w_2) : W \to X \times Y,$$

con $l(w) = (w_1(w), w_2(w)) \in X \times Y$ para cualquier $w \in W$.

Entonces, por la conmutatividad de los diagramas, sabemos que $s\pi_1 w = t\pi_2 w$. Luego, de esto y el hecho de que $P = E$ es ecualizador, podemos hallar una única flecha $\overline{f} : W \to P$, y tenemos que $e\overline{f} = l = (w_1, w_2)$.

De donde, obtenemos las siguientes igualdades

$$p_1\overline{f} = \pi_1 e\overline{f} = \pi_1(w_1, w_2) = w_1,$$

$$p_2\overline{f} = \pi_2 e\overline{f} = \pi_2(w_1, w_2) = w_2$$

y podemos concluir. □

Este resultado nos permite solo preocuparnos, mayormente, de la existencia de los productos y los ecualizadores. La razón es que se puede conseguir un resultado más general.

Teorema 10.4. *Sea $\mathscr{A}$ es una categoría que posee sus productos y ecualizadores, entonces posee todos sus límites.*

Demostración. (Esbozo) Sea $D : I \to \mathscr{A}$ un diagrama arbitrario. Por hipótesis el producto

$$\prod_{i \in I} D(i)$$

existe, al igual que el siguiente producto

$$\prod_{u \in \mathrm{Hom}_I(-,k)} D(k).$$

Es decir, hacemos producto con todos los elementos $D(k)$ donde el elemento k se repite por tantas flechas $u : j \to k$ existan en I.

Definimos dos flechas

$$\textstyle\prod_{i \in I} D(i) \overset{s}{\underset{t}{\rightrightarrows}} \prod_{u \in \mathrm{Hom}_I(-,k)} D(k),$$

donde escribimos $s = (s_u)_{u\in \mathrm{Hom}(-,k)}$ y $t = (t_u)_{u\in \mathrm{Hom}(-,k)}$. Así, definiendo en cada $u-$ésima componente, con $u : j \to k$ tenemos $s_u = p_j \circ D(u)$ y $t_u = p_k$ donde p_j es la proyección $\prod_{i\to I} D(i) \to D(j)$.

Ahora usamos la otra hipótesis y consideramos el ecualizador para el diagrama que contiene a las flechas paralelas s y t. Así tenemos $L \xrightarrow{p} \prod_{i\in I} D(i)$. Se puede verificar, por lo anterior, que L, junto con las proyecciones definidas por $\tilde{p}_i := p_i \circ p$ con $i \in I$ son un cono para el diagrama D y más aún se tiene que

$$L = \lim_{\leftarrow I} D.$$

$\square$

Observación 32. *Como la flecha p en la anterior demostración es la proyección de un ecualizador, sabemos (ver ejercicio resuelto 5) que debe ser mónica.*

*Si es que pensamos como lo hemos hecho antes, a los monomorfismos como funciones inyectivas generalizadas entonces podemos pensar en el límite L como subconjunto del producto de todos los datos $D(i)$. Este es justamente el caso en **Set** en donde se prueba que*

$$L = \lim_{\leftarrow I} D = \{(x_i)_{i\in I} \ : \ x_i \in D(i) \text{ para todo } i \in I \text{ y tal que } D(u)(x_i) = x_j, \ \forall u : i \to j\}.$$

*De manera similar, se puede verificar que esta fórmula también es válida en las categorías **Grp**, **Ring**, **Vect**$_k$ y para **Top**. En este último caso se arma al conjunto L con la topología final con respecto a la familia de proyecciones $\tilde{p}_i$. Es así como estas anteriores categorías tienen todos los límites.*

Ejercicio 10.5. *Probar que una flecha $f : X \to Y$ es monomorfismo si y solo si $X \times_Y X = X$, es decir, si y solo si tenemos que*

$$\begin{tikzcd} X \arrow[r, "1_X"] \arrow[d, "1_X"'] & X \arrow[d, "f"] \\ X \arrow[r, "f"] & Y \end{tikzcd}$$

es un pullback.

En general podemos seguir explorando como se ven distintas construcciones de todo tipo en categorías distintas a las contempladas: Por ejemplo, podemos ver como es que un coecualizador en la categoría de grafos, o que es un pullback en la categoría de variedades diferenciables, etc. Todas ellas tienen interpretaciones en el tratamiento clásico de estas áreas de la matemática.

En la literatura se encuentran extensas referencias a más construcciones, algunas conocidas y otras no tanto, que utilizan algún tipo de límite. Es de especial interés cuando estas construcciones se preservan si usamos funtores.

Definición. *Un funtor $F : \mathscr{A} \to \mathscr{B}$ se dice que **preserva límites** de la forma I si es que para todo diagrama $D : I \to \mathscr{A}$ que tiene como límite un cono $(L, p_i : L \to D(i))$ se cumple que $(F(L), F(L_i) : F(L) \to F(D(i)))$ es un cono y es límite para el diagrama $F(D)$. De forma sucinta*

$$F\left(\lim_{\leftarrow I} D\right) \cong \lim_{\leftarrow I} F(D).$$

*Si es que F preserva límites de todas las formas, entonces se dice que es **funtor continuo**.*

Observación 33. *Es importante notar que aqui no podemos tener una igualdad porque, de nuevo, los límites son esencialmente únicos, pero no únicos.*

Desde luego, adicionalmente tenemos los conceptos duales de funtor que preserva colímites y que es cocontinuo.

Lema 10.1. *Dado* $A \in \mathrm{ob}(\mathscr{A})$*, entonces el funtor* $\mathrm{Hom}_{\mathscr{A}}(A, -) : \mathscr{A} \to \mathbf{Set}$ *es continuo.*

Demostración. Para probar esto, debemos verificar que $\mathrm{Hom}(A, -)$ preserva todos los límites, pero por los teoremas ya expuestos solo debemos considerar que preserve los productos y ecualizadores.

Recordemos además que este funtor actúa por post-composición, es decir, que si $f : X \to Y$ entonces $f_* := \mathrm{Hom}(A, f) : \mathrm{Hom}(A, X) \to \mathrm{Hom}(A, Y)$ con $f_*(g) = f \circ g$.

El hecho de que preserve productos es equivalente a probar que

$$\mathrm{Hom}(A, X \times Y) \cong \mathrm{Hom}(A, X) \times \mathrm{Hom}(C, Y).$$

En efecto, para cada flecha $f : A \to X \times Y$ podemos considerar la aplicación

$$f \mapsto (p_1 \circ f, p_2 \circ f) \in \mathrm{Hom}(A, X) \times \mathrm{Hom}(C, Y),$$

la cual es una flecha en $\mathrm{Hom}(A, -)$ y tiene como inversa a la aplicación

$$(f_1, f_2) \to f,$$

donde f es la única flecha $A \to X \times Y$ que existe para el par $f_1 : A \to X$, $f_2 : A \to Y$, gracias a la propiedad universal del producto.

De manera análoga, tenemos lo mismo para productos arbitrarios

$$\mathrm{Hom}\left(A, \prod_{i \in I} X_i\right) \cong \prod_{i \in I} \mathrm{Hom}(A, X_i),$$

por tanto F sí preserva los productos.

Por otro lado, si es que tenemos un ecualizador

$$\begin{tikzcd} E \arrow[r, "e"] & X \arrow[r, shift left, "f"] \arrow[r, shift right, "g"'] & Y \end{tikzcd},$$

debemos comprobar que la imagen a través de $\mathrm{Hom}(A, -)$ lo es también, esta es

$$\begin{tikzcd} \mathrm{Hom}(A, E) \arrow[r, "e_*"] & \mathrm{Hom}(A, X) \arrow[r, shift left, "f_*"] \arrow[r, shift right, "g_*"'] & \mathrm{Hom}(A, Y). \end{tikzcd}$$

Recordemos que este diagrama reside en $\mathbf{Set}$. Por tanto, basta comprobar que

$$\mathrm{Hom}(A, E) \cong \{h \in \mathrm{Hom}(A, X) \ : \ f_* h = g_* h\}.$$

En efecto, tomamos $h \in \mathrm{Hom}(A, X)$ tal que $f_* h = g_* h$, entonces $f \circ h = g \circ h$; por tanto, como el primer diagrama sí es un ecualizador, existe un único $u : A \to E$ tal que $e \circ u = h$.

Es decir, para cada $u \in \mathrm{Hom}(A, E)$ existe un único $h \in \mathrm{Hom}(A, X)$ tal que $e_* u = e \circ u = h$. Pero entonces e_* es una biyeccion y obtenemos lo que debíamos comprobar. Por tanto, $\mathrm{Hom}(A, -)$ preserva ecualizadores. $\square$

De forma dual se tiene que el funtor contravariante $\mathrm{Hom}(-, A)$, que actúa por pre-composición, conserva todos los colímites.

Finalmente, nombraremos un tipo importante de colímite (y que no es finito) el cual explica porque también se los conoce como límites directos.

Definición. *Un* ***colímite dirigido*** *es un colímite* $\operatorname{lím}_{\to I} D$ *donde* I *es un poset dirigido. Esto es, un poset tal que su orden es parcial y cada subconjunto finito de* I *tiene una cota superior.*

Ejemplo 10.6. *Podemos tomar* $I = \omega$ *donde* ω *es el ordinal* $\mathbb{N}$ *visto como poset, es decir, es la categoría infinita*

$$1 \longrightarrow 2 \longrightarrow 3 \longrightarrow 4 \longrightarrow \dots$$

Por ejemplo, así un diagrama $D : \omega \to \mathbf{Grp}$ *de forma* ω *(o más bien su imagen), es una cadena*

$$G_0 \xrightarrow{f_1} G_1 \xrightarrow{f_2} G_2 \xrightarrow{f_3} G_3 \xrightarrow{f_4} \dots$$

tal que todo f_i *es homomorfismo.*

Escribimos al objeto colímite como

$$G_\infty \cong \lim_{\to w} D,$$

junto con las coproyecciones $u_n : G_n \to G_\infty$*; aunque es más usual en álgebra abstracta escribir este límite simplemente como*

$$\lim_{\to} G_i.$$

Este grupo siempre existe. Para probar lo dicho, consideremos la unión disjunta de los grupos G_i*, es decir*

$$\coprod_{i \in I} G_i = \{(g, i) \text{ con } g \in G_i\}.$$

En este conjunto definimos una relación de equivalencia de la forma $x_i \sim x_j$ *(aquí* $x_i = (x, i)$ *con* $x \in G_i$ *y por abuso del lenguaje ponemos* $x_i = x$*) si es que son "eventualmente iguales".*

Lo anterior quiere decir que, si definimos f_{ij} *como la flecha* $f_j f_{j-1} \dots f_{i+1} : G_i \to G_j$*, entonces* $x_i \sim x_j$ *si es que existe un* k *tal que* $i, j \leqslant k$ *y* $f_{ik}(x_i) = f_{jk}(x_j)$*. No es difícil demostrar que, efectivamente, esta es una relación de equivalencia. Observamos adicionalmente que* $x_n \sim f_{n+1}(x_n)$ *para todo* $n \in \mathbb{N}$*.*

Ahora, para las clases de equivalencia en $\coprod_{i \in I} G_i / \sim$*, definimos una operación*

$$[x] \cdot [y] = [x'y'],$$

donde $x \sim x'$*,* $y \sim y'$ *y* $x', y' \in G_n$*, lo cual siempre es posible para* n *suficientemente grande.*

Esta operación define una estructura de grupo, donde la identidad es la clase de equivalencia de elemento identidad del primer grupo: $[\mathrm{e}_0]$*, y el inverso de* $[x]$ *es* $[x^{-1}]$*.*

Por otro lado, definimos funciones $u_n : G_n \to G_\infty$ *como* $u_n(x) = [x]$*, las cuales son homomorfismos. Más aún, como* $x_n \sim f_{n+1}(x_n)$ *entonces* $u_{n+1} \circ f_{n+1} = u_n$*, lo que prueba que* G_∞ *junto con las flechas* u_n *son un cocono para nuestro diagrama.*

Finalmente, si es que tenemos otro grupo H *con homomorfismos* $h_n : G_n \to H$ *tales que* $h_{n+1} \circ f_{n+1} = h_n$ *para todo* n*, entonces podemos definir una flecha*

$$h_\infty : G_\infty \to H,$$

dada por $h_\infty([x_n]) = h_n(x_n)$. Se comprueba que esta función esta bien definida, porque no depende del representante x_n escogido, y que es un homomorfismo, además de que es única.

Concluímos así, que el grupo G_∞, junto con las coproyecciones u_n, es el colímite buscado.

11. Propiedades universales

Hemos usado la palabra "universal" de forma informal para referirnos usualmente a la parte, en ciertas definiciones, que nos dice como se relaciona un objeto de un categoría con todo el "universo" de todos los otros objetos. Esto ha pasado con las flechas iniciales, llamadas también universales, con los objetos libres y con los límites. Aquí damos un ejemplo informal más.

Ejemplo 11.1. *Consideramos espacios vectoriales U, V, W y un aplicación bilineal*

$$f : U \times V \to W,$$

entonces existe una "flecha bilineal universal" desde $U \times V$, en el sentido de que existe un espacio vectorial T y un aplicación bilineal $u : U \times V \to T$ tal que para todo $f : U \times V \to W$ bilineal existe un único $\overline{f} : T \to W$ con el cual el diagrama

$$\begin{tikzcd} U \times V \arrow[r, "u"] \arrow[dr, "f"'] & T \arrow[d, "\overline{f}"] \\ & W \end{tikzcd}$$

Podemos pensar en que esta propiedad universal expresa que las funciones desde $U \times V$ determinan, de forma única, aplicaciones lineales desde el espacio vectorial T.

Lo anterior es similar a cuando se consideró un grupo libre $F(X)$ desde un conjunto X y se tenia que toda flecha desde X, determina únicamente una flecha desde $F(X)$.

Concretamente, podemos tomar $X = \{1\}$ y $F(X) \cong \mathbb{Z}$, luego para saber qué valores toma un homomorfismo $f : \mathbb{Z} \to G$ para cualquier grupo aditivo G, nos basta solo con saber el valor $f(1) \in G$, es decir, solamente la flecha definida en X.

Regresando al espacio vectorial T, este será conocido como el producto tensorial $U \otimes V$, el cual es esencialmente único, (se puede verificar suponiendo que existe otro espacio vectorial, con sus respectiva flecha, que hace que el diagrama conmute y luego construyendo un isomorfismo entre ambos espacios vectoriales, como se hizo con los objetos libres). Al producto tensorial lo construiremos en un contexto más amplio en las lecciones finales.

Por ultimo, observemos que no es exactamente un diagrama conmutativo el que estamos dibujando pues todas las flechas no pertenecen a la misma categoría. En realidad, está implícito un funtor que envía flechas lineales a bilineales y que nos permite trabajar con distintos tipos de flechas, esto es similar a como pasó en el caso de objetos libres, donde usábamos un funtor olvidadizo.

Con esto en mente definimos esta noción central en la teoría.

Definición. *Sea $F : \mathscr{A} \to \mathscr{B}$ un funtor y sea $A \in \mathrm{ob}(\mathscr{A})$, $X \in \mathrm{ob}(\mathscr{B})$, entonces el par*

$$(A, u : X \to F(A)),$$

en $\mathscr{B}$, se dice un ***morfismo universal de** X **a** F* *si es que cumplen la* ***propiedad universal**:*

Para toda flecha $f : X \to F(A')$, con $A' \in \text{ob}(\mathscr{A})$, en $\mathscr{B}$ existe una única flecha $\overline{f} : A \to A'$ tal que el siguiente diagrama en $\mathscr{B}$ conmuta

$$\begin{tikzcd} X \arrow[r, "u"] \arrow[dr, "f"'] & F(A) \arrow[d, dotted, "F(\overline{f})"] \\ & F(A') \end{tikzcd}$$

De manera dual, un morfismo universal de F a X es un morfismo universal de X a F^{op}; de manera más clara, es un par $(A, u : F(A) \to X)$ tal que para toda flecha $f : F(A') \to X$ existe un único $h : A' \to A$ tal que conmuta

$$\begin{tikzcd} X & F(A) \arrow[l, "u"'] \\ & F(A') \arrow[ul, "f"] \arrow[u, dotted, "F(\overline{f})"'] \end{tikzcd}$$

El lector podrá revisar detenidamente la definición de objeto libre, para notar que el hecho de que A sea libre en el conjunto X es equivalente a que

$$(A, i : X \to U(A)),$$

donde i es la inclusión y U es un funtor olvidadizo, sea un morfismo universal de X a U.

Además, habíamos construido explícitamente el objeto A, en algunas categorías, hablando así de grupos libres, anillos libres, espacios vectoriales libres, etc.

Del mismo modo, podemos pensar que existe un funtor F que envía aplicaciones lineales a bilineales tal que $(A, u : U \times V \to F(A))$ con $F(A) = T$, sea universal de $U \times V$ a F.

Teorema 11.2. *Un morfismo universal A, u de X a F es esencialmente único.*

Demostración. La demostración es similar a otras que hemos hecho.

Suponemos que existe otro morfismo universal (A', u'), de X a F, entonces se tiene que $u' : X \to F(A')$, luego usando la propiedad universal de (A, u) sabemos que existe una única flecha $\overline{f} : A \to A'$ tal que $F(\overline{f}) \circ u = u'$.

De manera similar, usando la propiedad universal de (A', u') existe una única flecha $\overline{f}' : A' \to A$ tal que $F(\overline{f}') \circ u' = u$.

Luego, $g = F(\overline{f}') \circ F(\overline{f}) : F(A) \to F(A)$ cumple que $gu = u$, pero por otro lado $1_{F(A)}$ también cumple esto y hace que el diagrama conmute, trivialmente. Por tanto, como solo hay una flecha que hace esto, necesariamente

$$1_{F(A)} = g = F(\overline{f}') \circ F(\overline{f}),$$

de donde $F(\overline{f}' \circ \overline{f}) = 1_F(A)$ y así $\overline{f}' \circ \overline{f} = 1_A$; por tanto, $\overline{f}'$ es el inverso de $\overline{f}$, así $\overline{f} : A \to A'$ es un isomorfismo y es único. $\square$

Observación 34. *Veremos, en la siguiente lección, que los límites son morfismos universales, de donde por el teorema 11.2, se tendrá que los límites son esencialmente únicos.*

Por otro lado, cuando se estudió a los objetos libres, se observó que para probar que eran esencialmente únicos, se lo podía hacer alternativamente, notando que un objeto libre es el objeto inicial (o universal) de una categoría coma. Así, es como ese resultado puede ser generalizado para un morfismo universal y su demostración es análoga, solo que ahora en lugar de un funtor olvidadizo U, tenemos un funtor arbitrario F.

Teorema 11.3. *(A, u) es un morfismo universal, de X a F, si y solo si es un objeto inicial en la categoría coma $(X \downarrow F)$.*

Demostración. Ejercicio. $\square$

Las propiedades universales generalizan muchos aspectos de la teoría de categorías y, a pesar de que su noción parece inusualmente compleja, resultan en realidad un concepto tan amplio y versátil que una buena parte de las construcciones en matemáticas se pueden expresar como parte un morfismo universal.

Ejercicio resuelto 5

Dada una categoría $\mathscr{A}$ y dadas 2 flechas paralelas

$$A \underset{g}{\overset{f}{\rightrightarrows}} B$$

- Muestre que, en **Set**, para cada par de flechas $f, g : A \rightrightarrows B$, el ecualizador es la inclusión en A del subconjunto definido por:

$$i : \{x \in A \ : \ f(x) = g(x)\} \hookrightarrow A$$

- Muestre que en una categoría arbitaria $\mathscr{A}$, el ecualizador de un par de flechas es siempre mónico.

Demostración. Para la primera parte, probemos que la inclusión

$$i : E \hookrightarrow A$$

con $E = \{x \in A \ : \ f(x) = g(x)\}$, es un ecualizador. En efecto, para todo $z : X \to A$, con $fz = gz$, y como estamos en **Set**, entonces tenemos que $f(z(x)) = g(z(x))$ para todo $x \in X$.

Ahora, i es una inclusión, es inyectiva y por estar en **Set**, tenemos que es mónica. Luego, de la definición de flecha mónica, se tiene que existe a lo más una flecha u tal que el diagrama

$$\begin{tikzcd} E \arrow[r, "i"] & A \\ X \arrow[u, dotted, "u"] \arrow[ur, "z"'] & \end{tikzcd}$$

conmuta. Ahora, para probar la existencia definimos $u : X \to E$ con $u(x) = z(x)$ para todo $x \in X$, donde $z(x) \in E$ pues $fz = gz$. Por lo dicho antes, esta flecha es la única tal que $iu = z$, por lo tanto cumple la definición de ecualizador. El hecho de que es esencialmente único lo posponemos para el final del ejercicio.

Para la segunda parte debemos probar que $e : E \to A$, un ecualizador para f y g, es mónico. Para ello supongamos que $ex = ey$ con

$$\begin{tikzcd} X \arrow[r, shift left, "x"] \arrow[r, shift right, "y"'] & E, \end{tikzcd}$$

pero entonces si $z = ex = ey$, por definición de ecualizador existe un único $u : X \to E$ tal que

$$\begin{tikzcd} E \arrow[r, "e"] & A \arrow[r, shift left, "f"] \arrow[r, shift right, "g"'] & B \\ X \arrow[u, dotted, "u"] \arrow[ur, "z"'] & & \end{tikzcd}$$

conmuta. Por tanto, $u = x = y$.

Este mismo tipo de argumento nos permite probar que el ecualizador es esencialmente único. Específicamente, suponiendo que existe otro ecualizador $i' : E' \to A$ y usando el hecho de que $i : E \to A$ es ecualizador, obtenemos que existe una única flecha $u : E' \to E$; por el mismo argumento, razonando ahora con que i' es ecualizador, tenemos que existe un único $u' : E \to E'$.

Luego, $u \circ u' = 1_E$. De lo contrario, existe más de una flecha $E \to E$ lo cual contradice a que i es ecualizador. De manera similar, $u' \circ u = 1'_E$. En conclusión u es el único isomorfismo $E' \to E$ y así E es esencialmente único. $\square$

Ejercicio resuelto 6

Se define un **coecualizador** en una categoría $\mathscr{A}$, como un ecualizador en $\mathscr{A}^{op}$. Sea $R \subset X \times X$ una relación de equivalencia sobre el conjunto X, y considere las flechas paralelas

$$\begin{tikzcd} R \arrow[r, shift left, "\gamma_1"] \arrow[r, shift right, "\gamma_2"'] & X, \end{tikzcd}$$

donde para $k = 1, 2$ se tiene que $\gamma_k = p_k \circ i$ en

$$\begin{tikzcd} R \arrow[r, "i"] \arrow[dr, "\lambda_k"'] & X \times X \arrow[d, "p_k"] \\ & X \end{tikzcd}$$

con i la inclusión y $p_k : X \times X \to X$ la respectiva proyección canónica en la $k-$ésima componente.

Muestre que $\pi : X \to X/R$ con $\pi(x) = [x]$ es el coecualizador de γ_1, γ_2.

Demostración. Como un coequalizador es un ecualizador en la categoría opuesta entonces el anterior ejercicio también prueba que es esencialmente único. Ahora solo basta probar que π

satisface la definición dual de ecualizador. Para ello se debe comprobar que, para todo $z : X \to A$ con $z\gamma_1 = z\gamma_2$, existe un único

$$u : X/R \to A,$$

tal que el diagrama

$$\begin{tikzcd}
X/R \arrow[d, dotted, "u"'] & X \arrow[l, "\pi"'] \arrow[dl, "z"] & R \arrow[l, shift right, "\gamma_1"'] \arrow[l, shift left, "\gamma_2"] \\
X
\end{tikzcd}$$

conmuta. En efecto, notemos que para todo $(x_1, x_2) \in R$ entonces $z(x_1) = z(x_2)$ y se tiene que $z(\gamma_1(x_1, x_2)) = z(\gamma_2(x_1, x_2))$; luego $z(p_1 \circ i(x_1, x_2)) = z(p_2 \circ i(x_1, x_2))$ y así $z(p_1(x_1, x_2)) = z(p_2(x_1, x_2))$, pero esto es $z(x_1) = z(x_2)$.

Ahora, lo anterior nos permite "levantar el cociente", esto quiere decir que podemos definir

$$u : X/R \to X,$$

como $u([x]) = z(x)$ donde no importa que representante tomamos en la clase de equivalencia.

La flecha u es única pues π es sobreyectivo, y como estamos en **Set**, se tiene que es epimorfismo; concluímos que $\pi u = \pi u' \implies u' = u$. $\square$